Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Bachelor-Arbeit

Die Laplace-Gleichung mit maßwertiger rechter Seite

Tobias Meggendorfer

Aufgabensteller: Prof. Dr. Martin Brokate

Betreuer: Prof. Dr. Martin Brokate

Abgabetermin: 15.08.2013

Ich erkläre hiermit, dass ich die Bachelor-Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Garching, den

Summary

This work deals with the Laplace equation involving integrable or measure data with lower order perturbations and tries to impose some constraints on the functions under which one can ensure the existence of a weak solution. Mostly inspired by [6, 2, 5], the reader is encouraged to read those papers to get more general answers to arising questions.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Diese Arbeit behandelt die Laplace-Gleichung mit integrierbarer bzw. maßwertiger rechter Seite und einem von x und $u(x)$ abhängigen Störterm $g(x, s)$. Genauer formuliert: Sei $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt und glatt, $g \in C^0(\Omega \times \mathbb{R})$ und $f \in L^1(\Omega) \cup \mathcal{M}(\Omega)$. Gesucht wird eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u + g(x, u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei ist u eine schwache Lösung von (1.1) genau dann wenn

$$\begin{gathered} u \in H_0^1(\Omega),\ g(x, u) \in L^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \zeta \ \mathrm{d}x + \int_\Omega \zeta \cdot g(x, u) \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \zeta \cdot f \ \mathrm{d}x \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Der Übersichtlichkeit halber werden im Folgenden „schwache Lösungen“ von (1.1) einfach als „Lösung“ von (1.1) bezeichnet.

1.1. Zusammenfassung der Ergebnisse

In Abschnitt 2, der zum Großteil auf [6] basiert, stellt sich heraus, dass für (in s) monotone g und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ unter wenigen weiteren Voraussetzungen immer eine Lösung u existiert (cf. Abschnitt 2.1). Ist g jedoch nicht monoton treten einige Schwierigkeiten auf, dementsprechend kann unter den selben Voraussetzungen wie zuvor die Existenz einer Lösung nicht garantiert werden. Hat g zumindest das selbe Vorzeichen wie u, wird in Abschnitt 2.2 für f, die in einer *Orcliz-Klasse* liegen, die Existenz einer Lösung bewiesen.
Abschnitt 3 behandelt den Übergang zu $f = \mu \in \mathcal{M}(\Omega)$: Mithilfe von [2] wird gezeigt, dass dann auch an g weitere Anforderungen gestellt werden müssen. Wächst g nämlich zu schnell für $x \to \infty$, so gibt es $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, für die - selbst wenn g monoton ist - keine Lösung existiert. Abschnitt 3.1 zeigt zunächst die Existenz einer Lösung für $g = 0$, Abschnitt 3.2 behandelt dann den allgemeinen Fall.
Abschnitt 4 geht mit Hilfe von [5] kurz auf die Lösbarkeit der Gleichung für spezielle Paare g und μ ein. Dabei stellt sich heraus, dass man für ein festes g alle $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, die eine Lösung zulassen, sehr einfach eingrenzen kann.

1.2. Notation

- $C_0^n(\Omega) := \{f \in C^n(\Omega) : f = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$
- $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ist die Menge der p-fach (Lebesgue-)integrierbaren Funktionen mit Norm $\|\cdot\|_p$
- $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ sind die entsprechenden Sobolev Räume und Norm $\|\cdot\|_{k,p}$
- $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega) : Tu = 0\}$
- $H^k(\Omega) := \mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega) := \mathcal{W}_0^{k,2}(\Omega)$
- $\langle f, g\rangle := \int f \cdot g \, \mathrm{d}x$ für $f, g \in \mathcal{L}^2$.
- $H^{-k}(\Omega)$ ist der Dualraum zu $H_0^k(\Omega)$ (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$)
- $\mathcal{M}(\Omega)$ bezeichnet die Menge der beschränkten Radon-Maße auf Ω
- sup (inf) bezeichnet das essentielle Supremum (Infimum)
- $\Big(\dots\Big)^+ := \max\{0, \dots\}$, $\Big(\dots\Big)^- := \min\{0, \dots\}$
- Für $u, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ist B_g definiert als $B_g : \mathcal{L}^1(\Omega) \to \mathcal{L}^1(\Omega), u \mapsto g(x, u)$

2. Integrierbare rechte Seite

2.1. Monotoner Störterm

Satz 2.1

Sei $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(2.1) *Für fast alle $x \in \Omega$ ist $s \mapsto g(x,s)$ monoton steigend und $g(x,0) = 0$.*

(2.2) *$g(x,s)$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$ messbar in $x \in \Omega$ und für fast alle $x \in \Omega$ stetig in s.*

(2.3) *$M_C(x) := \sup_{|s| \leq C} |g(x,s)|$ liegt in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ für alle $C \in \mathbb{R}^+$.*

Dann existiert für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ genau ein $u \in \mathfrak{D} := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ mit

$$-\Delta u + g(x,u) = f. \tag{2.4}$$

Weiterhin gilt

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,q}(\Omega) \qquad \text{für alle } 1 \leq q < \frac{N}{N-1} \tag{2.5}$$

Für $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $u, \hat{u}$ die zugehörigen Lösungen von (2.4) gilt

$$\left\|(f + \Delta u) - (\hat{f} + \Delta \hat{u})\right\|_1 \leq \left\|f - \hat{f}\right\|_1 \tag{2.6}$$

bzw.

$$\|\Delta(u - \hat{u})\|_1 \leq 2\left\|f - \hat{f}\right\|_1. \tag{2.7}$$

Anmerkung 1

Ist g nur von s abhängig, so vereinfachen sich die Bedingungen (2.1) - (2.3) zu: $g(s)$ ist stetig und monoton mit $g(0) = 0$.

Anmerkung 2

Gilt statt (2.3), dass $M_C(x) \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so kann die Existenzaussage aus Satz 2.1 mit einer anderen Herangehensweise bewiesen werden (cf. [2, Seite 161 - 164])

2.1.1. Beweis von Satz 2.1

Für den Beweis werden zwei Hilfsaussagen benötigt, die später bewiesen werden:

Lemma 2.1

Sei γ monoton mit $\gamma(0) = 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{L}^p(\Omega)$, $\Delta u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$ so dass $g = \gamma(u)$. Dann

$$\int_\Omega -\Delta u(x) g(x) \, \mathrm{d}x \geq 0. \tag{2.8}$$

Satz 2.2

Der Operator Δ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(2.9) $\mathfrak{D}$ *ist dicht in* $\mathcal{L}^1(\Omega)$, Δ *ist abgeschlossen und* $\mathrm{id} - \lambda\Delta$ *ist bijektiv,*

(2.10) $(\mathrm{id} - \lambda\Delta)^{-1}$ *ist nicht-expansiv in* $\mathcal{L}^1(\Omega)$ *für* $\lambda > 0$.

(2.11) $\sup_\Omega (\mathrm{id} - \lambda\Delta)^{-1} f \leq (\sup_\Omega f)^+$ *für* $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *und*

(2.12) $\mathfrak{D} \subset \mathcal{W}_0^{1,q}(\Omega)$ *für* $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, $\alpha \|u\|_{1,q} \leq \|\Delta u\|_1$ *für ein* $\alpha = \alpha_q > 0$, $u \in \mathfrak{D}$.

Beweis: $\mathfrak{D}$ dicht in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ und Δ abgeschlossen ist bekannt. (2.10) folgt mit [3, Satz 9.8], da Δ maximal monoton ist. Der Rest folgt mit [6, Theorem 8] ■

Beweis von Satz 2.1: Zuerst zeigt man (2.6), daraus folgt dann (2.7) und die Eindeutigkeit von u: Seien $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, $u, \hat{u}$ die zugehörigen Lösungen der Gleichung und $b := f + \Delta u = B_g(u)$, analog $\hat{b} := B_g(\hat{u})$. Nun multipliziert man

$$-\Delta(u - \hat{u}) + b - \hat{b} = f - \hat{f}$$

mit $h(x) := \mathrm{signum}(u - \hat{u})$. h ist f.ü. definiert und messbar (da $u, \hat{u} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$) und $h \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Damit lässt sich Lemma 2.1 mit $p = 1$, $\gamma = \mathrm{signum}$ anwenden und man erhält

$$\int_\Omega -\Delta(u - \hat{u}) h \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

also $\langle -\Delta(u - \hat{u}), h \rangle \geq 0$. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \left\| b - \hat{b} \right\|_1 &= \int_\Omega |B_g(u) - B_g(\hat{u})| \, \mathrm{d}x \overset{g \text{ mon.}}{=} \int_\Omega (B_g(u) - B_g(\hat{u})) \,\mathrm{signum}(u - \hat{u}) \, \mathrm{d}x = \\ &= \left\langle b - \hat{b}, h \right\rangle = \left\langle (f - \hat{f}) + \Delta(u - \hat{u}), h \right\rangle \leq \left\langle f - \hat{f}, h \right\rangle \leq \left\| f - \hat{f} \right\|_1. \end{aligned}$$

Damit ist (2.6), (2.7) und die Eindeutigkeit von u gezeigt.

Nun zeigt man, dass das Bild von $-\Delta + B_g$ die Menge $\mathcal{L}^1(\Omega)$ enthält: Sei $(u_n) \subset \mathfrak{D}$, $f_n :=$

$-\Delta u_n + B_g(u_n)$ mit $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^1(\Omega)$. (2.7) zeigt

$$\|{-\Delta}(u_n - u_m)\|_1 \leq 2\|f_n - f_m\|_1.$$

Mit (2.12) folgt, dass $\{u_n\}$ Cauchy-Folge ist, also existiert ein $u \in \mathfrak{D}$ mit $u_n \to u$. Da $-\Delta$ nach (2.9) ein abgeschlossener Operator ist, gilt $u_n \to u \Rightarrow \Delta u_n \to \Delta u$ in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ und unter Verwendung von (2.2) damit auch $f + \Delta u = B_g(u)$, das Bild von $-\Delta + B_g$ ist also abgeschlossen.

Es bleibt nun zu zeigen, dass das Bild dicht ist: Zuerst wird g durch die folgenden Funktionen angenähert, der Einfachheit halber wird $g_x(s) := g(x,s)$ definiert:

$$g_\lambda(x,s) := \frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{id} - (\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}\right)(s), \quad \lambda > 0$$

Die Bildung des Inversen ist möglich, da $\mathrm{id} + \lambda g_x$ mit (2.1) für alle x streng monoton ist. Außerdem gilt $g_\lambda(x,s) \xrightarrow{\lambda \to 0} g(x,s)$, g_λ ist Lipschitz-stetig in s mit $L = \frac{2}{\lambda}$ und $g_\lambda(x,s) \leq g(x,s)$ für alle $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ (cf. Anhang A).

Nun löst man für jedes $\varepsilon, \lambda > 0$, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ die Gleichung

$$\varepsilon u - \Delta u + B_{g_\lambda}(u) = f, \tag{2.13}$$

was umformuliert werden kann zu

$$\lambda \varepsilon u - \lambda \Delta u + u = \lambda f + (\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(u)$$

bzw.

$$u = \frac{1}{1+\lambda\varepsilon}\left(\mathrm{id} - \frac{\lambda}{1+\lambda\varepsilon}\Delta\right)^{-1}\left(\lambda f + (\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(u)\right), \tag{2.14}$$

dabei ist (mit (2.1) und (2.10)) die rechte Seite insgesamt eine Kontraktion in $\mathcal{L}^1(\Omega)$, die Gleichung besitzt folglich einen Fixpunkt $u \in \mathfrak{D}$.

Sei nun zusätzlich $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Nach (2.11) gilt

$$\left\|(\mathrm{id} - \lambda\Delta)^{-1}\tilde{f}\right\|_\infty \leq \left\|\tilde{f}\right\|_\infty \quad \text{für } \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega). \tag{2.15}$$

Wendet man das vorige Fixpunkt-Argument nochmals in $\mathcal{L}^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ an, so folgt, dass u und $-\Delta u$ essentiell beschränkt sind.

Nun wählt man $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ fest und lässt $\lambda \to 0$. Sei u_λ die Lösung zu (2.13). Aus (2.14) folgt dann mit (2.10)

$$\|u_\lambda\| \leq \frac{1}{1+\lambda\varepsilon}(\lambda\|f\| + \|u_\lambda\|) \quad \Rightarrow \quad \lambda\varepsilon\|u_\lambda\| \leq \lambda\|f\| \quad \Rightarrow \quad \|u_\lambda\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|f\|.$$

Als nächstes zeigt man, dass $B_{g_\lambda}(u_\lambda) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ und damit $\{u_\lambda\}$ sowie $\{g_\lambda(u_\lambda)\}$ Cauchy-Folgen in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ sind: Es gilt $g_\lambda(x, u_\lambda(x)) \leq g(x, u_\lambda(x))$, nach (2.3) gilt aber auch $g(x, u_\lambda(x)) \leq M_C(x)$. Wählt man $C = \|u_\lambda\|_\infty$ folgt, dass $\{B_{g_\lambda}(u_\lambda)\}$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ beschränkt ist. Außerdem folgt mit $u_\lambda, u_\mu \in \mathcal{L}^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty$ und Lemma 2.1 ($\gamma = \mathrm{id}$, $p = 1$, $g = u = u_\lambda - u_\mu$)

$$0 \geq \int_\Omega (u_\lambda - u_\mu)\Delta(u_\lambda - u_\mu)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega (u_\lambda - u_\mu)((f + \Delta u_\lambda) - (f + \Delta u_\mu))\ \mathrm{d}x \overset{(2.13)}{=}$$
$$\int_\Omega (u_\lambda - u_\mu)((\varepsilon u_\lambda + B_{g_\lambda}(u_\lambda)) - (\varepsilon u_\mu + B_{g_\mu}(u_\mu)))\ \mathrm{d}x =$$
$$\varepsilon\|u_\lambda - u_\mu\|_2^2 + \langle B_{g_\lambda}(u_\lambda) - B_{g_\mu}(u_\mu), u_\lambda - u_\mu\rangle. \tag{2.16}$$

Dabei lässt sich der letzte Faktor umformulieren zu

$$u_\lambda - u_\mu = \lambda B_{g_\lambda}(u_\lambda) + \Big((\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(u_\lambda) - (\mathrm{id} + \mu g_x)^{-1}(u_\mu)\Big) - \mu B_{g_\mu}(u_\mu),$$

damit

$$\langle B_{g_\lambda}(u_\lambda) - B_{g_\mu}(u_\mu), u_\lambda - u_\mu\rangle = \langle B_{g_\lambda}(u_\lambda) - B_{g_\mu}(u_\mu), \lambda B_{g_\lambda}(u_\lambda) - \mu B_{g_\mu}(u_\mu)\rangle +$$
$$\Big\langle B_{g_\lambda}(u_\lambda) - B_{g_\mu}(u_\mu), (\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(u_\lambda) - (\mathrm{id} + \mu g_x)^{-1}(u_\mu)\Big\rangle.$$

g ist monoton, folglich ist der letzte Term nicht-negativ, (2.16) zeigt damit

$$\varepsilon\|u_\lambda - u_\mu\|_2^2 + \langle B_{g_\lambda}(u_\lambda) - B_{g_\mu}(u_\mu), \lambda B_{g_\lambda}(u_\lambda) - \mu B_{g_\mu}(u_\mu)\rangle \leq 0. \tag{2.17}$$

Für $\lambda, \mu \to 0$ ist $\{u_\lambda\}$ also Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, der Grenzwert u liegt in $\mathcal{L}^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. [7, Lemma 2.4] zeigt, dass $\{B_{g_\lambda}(u_\lambda)\}$ Cauchy in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ist. Der Grenzwert $\hat{B} := \lim_{\lambda \to 0} B_{g_\lambda}(u_\lambda)$ liegt ebenfalls in $\mathcal{L}^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und $\hat{B} = B_g(u)$. Es gilt also $(\varepsilon\,\mathrm{id} - \Delta)u_\lambda \xrightarrow{\lambda \to 0} f - \hat{B}$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Sei $v := (\varepsilon\,\mathrm{id} - \Delta)^{-1}(f - \hat{B})$. Mit (2.9) und (2.11) gilt $v \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Offensichtlich gilt $(\varepsilon\,\mathrm{id} - \Delta)(u_\lambda - v) \xrightarrow{\lambda \to 0} 0$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Multipliziert man diesen Ausdruck mit $u_\lambda - v$ folgt mit Lemma 2.1 $u_\lambda \to v$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, also $u = v$ und nach Definition von v auch $\varepsilon u - \Delta u + \hat{g} = f$.

Sei nun $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $f^\varepsilon \to f$ in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $f^\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ und u^ε die Lösung von

$$\varepsilon u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + B_g(u^\varepsilon) = f^\varepsilon$$

Mit (2.7) und (2.12) folgt

$$\alpha\|u^\varepsilon\|_{1,q} \leq \|\Delta u^\varepsilon\|_1 \leq 2\|f^\varepsilon\|_1$$

Also $\varepsilon u^\varepsilon \to 0$ in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ und damit ist $f = \lim(f^\varepsilon - \varepsilon u^\varepsilon) = \lim(-\Delta u^\varepsilon + B_g(u^\varepsilon))$ Element des Abschluss des Bildes von $-\Delta + B_g$. ■

2.1.2. Beweis von Lemma 2.1

Der Beweis von Lemma 2.1 benötigt ein weiteres Lemma

Lemma 2.2

Sei $T : \mathcal{L}^1(\Omega) \to \mathcal{L}^1(\Omega)$ so dass für alle $u, v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ gilt

$$\|Tu - Tv\|_1 \leq \|u - v\|_1 \tag{2.18}$$

$$\Big(\inf_\Omega u\Big)^- \leq Tu \leq \Big(\sup_\Omega u\Big)^+. \tag{2.19}$$

Außerdem sei $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ unterhalbstetig mit $\min j = j(0) = 0$. Dann gilt

$$\int_\Omega j(Tw)\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega j(w)\ \mathrm{d}x \tag{2.20}$$

für alle $w \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $j(u) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

Beweis: Zuerst betrachtet man die konvexen Funktionen $k(r) := \Big(r - t\Big)^+$ und $l(r) := \Big(-r - t\Big)^+$ mit $t \geq 0$ beliebig. Definiere $y(x) := \min\{u(x), t\}$, da $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ist auch $y \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Mit (2.19) gilt $Ty \leq \Big(\sup_\Omega y\Big)^+ = \Big(\sup_\Omega \min\{u(x), t\}\Big)^+ \leq t$. Damit folgt

$$\Big(Tu(x) - t\Big)^+ \leq \Big(Tu(x) - Ty(x)\Big)^+ \leq |Tu(x) - Ty(x)| \quad \text{f.ü. .} \tag{2.21}$$

Integrieren zeigt

$$\int_\Omega \Big(Tu(x) - t\Big)^+\ \mathrm{d}x \overset{(2.21)}{\leq} \|Tu(x) - Ty(x)\|_1 \overset{(2.18)}{\leq} \|u(x) - y(x)\|_1 = \int_\Omega \Big(u(x) - t\Big)^+\ \mathrm{d}x. \tag{2.22}$$

Damit ist das Lemma für $j = k$ bewiesen.

Weiterhin erfüllt der Operator $T' := -T(-u)$ ebenfalls die Voraussetzungen (2.18) und (2.19). (2.22) ergibt dann

$$\int_\Omega \Big(-T(-u)(x) - t\Big)^+\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \Big(u(x) - t\Big)^+\ \mathrm{d}x.$$

Mit $v = -u$ ist das Lemma auch für $j = l$ erfüllt.

Kombiniert man die Ergebnisse für k und l, so folgt

$$\int_\Omega \Big(t\,(Tu(x) - t)\Big)^+\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \Big(t\,(u(x) - t)\Big)^+\ \mathrm{d}x \tag{2.23}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Durch Konvex-Kombinationen von k und l lässt sich nun der allgemeine Fall behandeln: Sei $j \in C^1(\mathbb{R})$ eine beliebige konvexe Funktion mit Lipschitz-stetiger Ableitung (damit $j'' \in \mathcal{L}^1(\Omega)$) und $\min j = j(0) = 0$. Dann gilt

$$j(r) = \int_{\mathbb{R}} \frac{j''(t)}{|t|} \Big(t(r-t)\Big)^+ \, \mathrm{d}t. \tag{2.24}$$

Dies folgt aus einer einfachen Fallunterscheidung:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{j''(t)}{|t|} \Big(t(r-t)\Big)^+ \, \mathrm{d}t =$$

$$\underline{r<0:} \quad = \int_r^0 \frac{j''(t)}{-t} t(r-t) \, \mathrm{d}t = \int_0^r j''(t)(r-t) = (\star)$$

$$\underline{r\geq 0:} \quad = \int_0^r \frac{j''(t)}{t} t(r-t) \, \mathrm{d}t = (\star) = \Big[j'(t)(r-t) + j(t)\Big]_0^r = j(r) - \underbrace{j'(0)}_{=0,\text{ da } 0 \text{ Min. von } j\in C^1} r = j(r).$$

Durch multiplizieren von (2.23) mit $\frac{j''(t)}{|t|}$ und nochmaligem integrieren folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \frac{j''(t)}{|t|} \Big(t(Tu(x)-t)\Big)^+ \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \frac{j''(t)}{|t|} \Big(t(u(x)-t)\Big)^+ \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Fubini und (2.24) führt zum Ergebnis für j:

$$\int_{\Omega} j(Tu(x)) \, \mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} j(u(x)) \, \mathrm{d}x.$$

Ist nun j beliebig unterhalbstetig existiert eine Folge $\{j_\lambda\}$ mit den obigen Eigenschaften die monoton von unten gegen j konvergiert (cf. [4, Proposition 10]):

$$j_\lambda(r) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2\lambda}|r-t|^2 + j(t) \right\}.$$

Damit gilt

$$\int_{\Omega} j_\lambda(Tu(x)) \, \mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} j_\lambda(u(x)) \, \mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} j(u(x)) \, \mathrm{d}x.$$

Folglich ist $j(Tu) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und das Lemma ist mit $\lambda \to 0$ bewiesen. ∎

Beweis von Lemma 2.1 : Sei j das unbestimmte Integral von γ mit $j(0) = 0$. $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ist konvex und unterhalbstetig mit $\min j = 0$. Da $g(x) = j'(u(x))$ f.ü. , gilt mit $T_\lambda := (\mathrm{id} - \lambda\Delta)^{-1}$:

$$j(T_\lambda u) - j(u) \geq g \cdot (T_\lambda u - u) = g \cdot (T_\lambda u - T_\lambda T_\lambda^{-1} u) = \lambda g T_\lambda(\Delta u).$$

Außerdem gilt

$$j(0) - j(u(x)) \geq g(x)(0 - u(x)) \quad \text{f.ü. },$$

da $g \cdot u$ integrierbar ist, ist also auch $j(u)$ integrierbar. Mit Lemma 2.2 folgt

$$\int_\Omega j(T_\lambda u)\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega j(u)\ \mathrm{d}x.$$

Also $\langle g, T_\lambda \Delta u \rangle \leq 0$.

Es ist bekannt, dass $T_\lambda \Delta u \to \Delta u$ in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ für $\lambda \to 0$. Damit wurde das Lemma für $p = 1$ gezeigt. Für $1 < p \leq \infty$ gilt:

$$\|T_\lambda \Delta u\|_p \leq \|\Delta u\|_p.$$

nach Lemma 2.2 (für $p < \infty$ und $j(x) := |x|^p$) und (2.11) (für $p = \infty$). Falls $1 < p < \infty$ konvergiert $T_\lambda \Delta u \to \Delta u$ schwach in $\mathcal{L}^p(\Omega)$, was zur Behauptung führt. Für $p = \infty$ konvergiert eine Teilfolge von $\{T_\lambda \Delta u\}$ f.ü. , der Satz von der dominierten Konvergenz ist also anwendbar. ∎

2.2. Nicht-monotoner Störterm

2.2.1. Grundlagen von Orlicz-Räumen

Für den nicht monotonen Fall betrachtet man statt $\mathcal{L}^1(\Omega)$ sog. Orlicz-Klassen. Diese sind - im Wesentlichen - eine Erweiterung der Definition von Lebesgue-Räumen: Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ liegt in $\mathcal{L}^p(\Omega)$, falls

$$\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Definiert man $\Phi(t) := t^p$, so lässt sich diese Bedingung umformulieren zu

$$\int_\Omega \Phi(|u|) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob man dieses Φ durch allgemeinere Funktionen ersetzen kann und immer noch sinnvolle Ergebnisse erzielt. Die Antwort darauf liefert die Theorie der Orlicz-Klassen:

Definition 2.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Dann bezeichnet $\tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega)$ die Menge aller Funktionen für die

$$\int_\Omega \Phi(|u|) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

$\tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega)$ wird Orlicz-Klasse *genannt.*

Offensichtlich lässt sich der Begriff der Norm im Allgemeinen nicht so einfach übertragen, für gewisse Φ ist $\tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega)$ sogar nicht einmal ein Vektorraum: Wählt man $\Omega = (0,1)$, $\Phi(t) = e^t$, so ist $u(x) := -\frac{1}{2}\log x$ in $\tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega)$, $2u(x) = -\log x$ jedoch nicht. Daher schränkt man die Menge der zulässigen Φ auf *Young-Funktionen* ein.

Definition 2.2

Φ ist eine Young-Funktion, *falls ein $\phi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ existiert mit $\phi(0) = 0$, ϕ rechtsstetig und monoton, $\phi(s) \xrightarrow{s\to\infty} \infty$ und*

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s) \, \mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Da Orlicz-Klassen in dieser Arbeit nur ein Mittel zum Zweck sind, werden im Folgenden die wichtigsten Ergebnisse aus [10] und [11, Kapitel 3] ohne Beweise präsentiert:

Lemma 2.3

Eine Young-Funktion ist stetig, nicht-negativ, streng monoton steigend und konvex. Außerdem $\Phi(0) = 0$, $\Phi(s) \xrightarrow{s\to\infty} \infty$.

Satz 2.3

Sei Φ eine Young-Funktion. Dann ist $\tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega)$ konvex und $\tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega) \subset \mathcal{L}^1(\Omega)$ falls $|\Omega| < \infty$.

Satz 2.4

Sei $|\Omega| < \infty$ und $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Dann gibt es eine Young-Funktion Φ so dass $u \in \tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega)$.

Für die Anwendung auf das behandelte Problem benötigt man noch einige speziellere Ergebnisse. Sei Φ also Young-Funktion mit dem zugehörigen $\tilde{\phi}$. $\tilde{\phi}$ wird durch Punktspiegelung zu $\phi(s) := \operatorname{signum}(s)\tilde{\phi}(|s|)$ erweitert. Weiterhin wird gefordert, dass dieses $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ liegt. Nun definiert man

$$\Theta(s) := \int_0^s \sqrt{(\phi'(t))}\,\mathrm{d}t, \quad \Psi(r) := \sup_{s\in\mathbb{R}}(rs - \Phi(s)).$$

Ψ ist die konvex-konjugierte Funktion zu $\Phi(s)$. Das Supremum in der Definition von Ψ wird genau dann angenommen, falls $r = \phi(s)$ (cf. [10]). Da $\phi(s) \xrightarrow{s\to\infty} \infty$ gibt es für $|s|$ groß genug ein $C > 0$ mit $\Theta(s) > C$.

Lemma 2.4

Sei ϕ wie zuvor und $c \in \mathbb{R}$ mit $s\phi''(s) \le c\phi'(s)$ für große s. Dann gilt:

(2.25) *$\Phi(ks)/\Phi(s)$ ist beschränkt für große s und*

(2.26) *$\Psi(s)/\Theta(s)^2$ ist beschränkt für große s.*

Beweis : Es gilt

$$\left(s^{-c}\phi'(s)\right)' = -cs^{-c-1}\left(\phi'(s) - \frac{s}{c}\phi''(s)\right) \le 0.$$

$s^{-c}\phi'(s)$ ist also monoton fallend für große s, damit $\phi'(ks) \le k^c\phi'(s)$ mit $k \ge 1$. Zweimal integrieren liefert mit $\phi(s) \xrightarrow{s\to\infty} \infty$ die Behauptung (2.25).

Mit der Definition von Θ gilt $\left(\Theta'(s)\right)^2 = \phi'(s)$, also $2\Theta'(s)\Theta''(s) = \phi''(s)$. Nach Voraussetzung:

$$\phi'(s)\big(c\Theta'(s) - 2s\Theta''(s)\big) = s\Theta'(s)\left(c\frac{\phi'(s)}{s} - 2\Theta'(s)\Theta''(s)\right) \ge s\Theta'(s)\big(\phi''(s) - 2\Theta'(s)\Theta''(s)\big) = 0.$$

Mit den Eigenschaften von ϕ folgt, dass $(c+2)\Theta(s) - 2s\Theta'(s)$ für große s monoton steigend ist, also auch $s\Theta'(s) \le 2c_1\Theta(s)$ mit $c_1 := \frac{c+2}{c}$. Multipliziert man Letzteres mit $\Theta'(s)$, so folgt $s\phi'(s) \le 2c_1\Theta(s)\Theta'(s)$ für große s. Integrieren zeigt

$$\Psi(\phi(s)) = s\phi(s) - \Phi(s) \le c_1\Theta^2(s) \quad \text{für große } s.$$

$\blacksquare$

2.2.2. Betrachtung der homogenen Gleichung

Zunächst betrachtet man nun den homogenen Fall, auf den sich der inhomogene Fall schnell zurückführen lässt (cf. Korollar 2.1). Sei $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert von $-\Delta$ in Ω mit Dirichlet-Randbedingung.

Satz 2.5

Sei Φ Young-Funktion und ϕ, Θ, Ψ definiert wie zuvor. Sei außerdem $g(x,s)$ Funktion mit

(2.27) *$g(x,s)$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$ messbar in $x \in \Omega$ und für fast alle $x \in \Omega$ stetig in s.*

(2.28) *$M_C(x) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ (ähnlich zu (2.3)).*

(2.29) *Es gibt ein $w \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ s.d. $\liminf\limits_{|s|\to\infty} \inf\limits_{x\in\Omega} \frac{g(x,s)\phi(s)+w(x)}{(\Theta(s))^2} > -\lambda_1$.*

Dann existiert eine Lösung u zu $\Delta u + B_g(u) = 0$ in Ω mit:

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,q}(\Omega) \quad \text{für } 1 \leq q < \frac{N}{N-1}, \tag{2.30}$$

$$B_g(u) \in \mathcal{L}^1(\Omega),\ B_g(u)\phi(u) \in \mathcal{L}^1(\Omega), \tag{2.31}$$

$$\Theta(u) \in H_0^1(\Omega). \tag{2.32}$$

2.2.3. Beweis von Satz 2.5

Für den Beweis dieses Satzes werden wieder einige Lemmata benötigt:

Lemma 2.5

Sei $g(x,s)$ gleichmäßig beschränkt auf $\Omega \times \mathbb{R}$, messbar in x und stetig in s. Dann existiert ein $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit $\Delta u + B_g(u) = 0$

Lemma 2.6

Für ein beliebiges $v \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ gilt die folgende Ungleichung:

$$\langle -\Delta v, \phi(v)\rangle \geq \lambda_1 \|\Theta(v)\|_2^2 \geq 0$$

Beweis: Zuerst stutzen wir g wie folgt:

$$g_n(x,s) := \begin{cases} g(x,s) & \text{falls } |g(x,s)| \leq n \\ n \operatorname{signum} g(x,s) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Lemma 2.5 existiert ein $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ so dass $-\Delta u_n + B_{g_n}(u_n) = 0$.

(2.29) lässt sich wie folgt umformulieren: Es gibt $\varepsilon > 0$ und $C > 0$ mit

$$g(x,s)\phi(s) > (\varepsilon - \lambda_1)\Theta(s)^2 - w(x) \quad \text{f.ü.}$$

für $|s| \geq C$. Mit $s = u_n(x)$ und (2.28) (das eine Abschätzung für $|s| = |u_n(x)| \leq C$ gibt) gelangt man zu

$$B_{g_n}(u_n)\phi(u_n) \geq (\varepsilon - \lambda_1)\Theta(u_n)^2 - h$$

mit h integrierbar. Integration über Ω zeigt

$$\langle B_{g_n}(u_n), \phi(u_n)\rangle \geq (\varepsilon - \lambda_1)\|\Theta(u_n)\|_2^2 - \|h\|_1.$$

Andererseits gilt nach Lemma 2.6

$$\langle -\Delta u_n, \phi(u_n)\rangle \geq \lambda_1 \|\Theta(u_n)\|_2^2,$$

zusammen also

$$\langle -\Delta u_n + B_{g_n}(u_n), \phi(u_n)\rangle \geq \varepsilon \|\Theta(u_n)\|_2^2 - \|h\|_1.$$

Mit der Definition von u_n ist $\|\Theta(u_n)\|_2^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\|h\|_1 < \infty$. Weiterhin folgt

$$-\infty < \lambda_1\|\Theta(u_n)\|_2^2 \leq \langle -\Delta u_n, \phi(u_n)\rangle = -\langle B_{g_n}(u_n), \phi(u_n)\rangle \leq (\lambda_1 - \varepsilon)\|\Theta(u_n)\|_2^2 + \|h\|_1 < \infty,$$

also sind sowohl $\{\langle B_{g_n}(u_n), \phi(u_n)\rangle\}$ als auch $\{\langle -\Delta u_n, \phi(u_n)\rangle\}$ beschränkt. Nochmalige Anwendung von Lemma 2.5 zeigt, dass $\{\Theta(u_n)\}$ auch in $H_0^1(\Omega)$ beschränkt ist. Weiterhin gelten folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\int |B_{g_n}(u_n)\phi(u_n)| \, \mathrm{d}x &= \langle B_{g_n}, \phi(u_n)\rangle - 2\int_{\{B_{g_n}(u_n)\phi(u_n) \leq 0\}} B_{g_n}(u_n)\phi(u_n) \, \mathrm{d}x \\ &\leq \langle B_{g_n}(u_n), \phi(u_n)\rangle + 2(\lambda_1 - \varepsilon)\|\Theta(u_n)\|_2^2 + 2\|h\|_1\end{aligned}$$

und

$$\int_\Omega |B_{g_n}(u_n)| \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |B_{g_n}(u_n)\phi(u_n)| \, \mathrm{d}x + \int_{\{|\phi(u_n)|<1\}} |B_g(u_n)| \, \mathrm{d}x.$$

Das letzte Integral ist beschränkt, da nach Voraussetzung für s groß $\phi(s) > 1$ ist und damit die Integration über die Menge $\{x \in \Omega : |u_n| \leq C\}$ mit $C > 0$ erfolgt, auf der $B_g(u_n)$ durch $M_C(u_n)$ beschränkt und damit auch integrierbar ist. Insgesamt sind also $\{B_{g_n}(u_n)\phi(u_n)\}$ und $\{B_{g_n}(u_n)\}$ beide in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ beschränkt. Damit ist auch $\{-\Delta u_n\} = \{B_{g_n}(u_n)\}$ beschränkt. Zusammen mit (2.12) ist $\{u_n\}$ beschränkt in $\mathcal{W}_0^{1,q}(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

Mit schwacher Kompaktheit kann man eine (der Einfachheit halber um-nummerierte) Teilfolge finden, so dass

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } \mathcal{W}_0^{1,q}(\Omega) \text{ (schwach)}, \\ \Theta(u_n) &\rightharpoonup \tilde{\Theta} && \text{in } H_0^1(\Omega) \text{ (schwach)}. \end{aligned}$$

Mit starker Kompaktheit folgt

$$\begin{aligned} u_n &\to u && \text{f.ü. }, \\ \Theta(u_n) &\to \Theta(u) && \text{f.ü. }, \\ \Theta(u_n) &\rightharpoonup \Theta(u) && \text{in } H_0^1(\Omega) \text{ (schwach)}. \end{aligned}$$

Ebenfalls folgt, dass $B_{g_n}(u_n) \to B_g(u)$ f.ü. und $B_{g_n}\phi(u_n) \to B_g(u)\phi(u)$ f.ü. . Mit Fatou's Lemma sind $B_g(u)$ und $B_g(u)\phi(u)$ auf Ω integrierbar. Da $\phi(s) \to \infty$ für $s \to \infty$, folgt mit [14] $B_{g_n}(u_n) \to B(u)$ in $\mathcal{L}^1(\Omega)$. Damit konvergiert jeder Term in der Näherungsgleichung in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ und $-\Delta u + B(u) = 0$. ■

2.2.4. Beweis von Lemma 2.5 und Lemma 2.6

Beweis von Lemma 2.5 : Für ein beliebiges $v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die Lösung der linearen Gleichung $-\Delta u + B_g(v) = 0$. Multiplizieren mit u und integrieren über Ω führt mit Poincaré und Cauchy-Schwarz zu

$$\|\nabla u\|_2^2 = |\langle \nabla u, \nabla u \rangle| = \left| \int_\Omega B_g(v) \cdot u \,\mathrm{d}x \right| \le C \|B_g(u)\|_2 \|\nabla u\|_2,$$

also

$$\alpha \|u\|_{1,2} \le \|B_g(v)\|_2 \le |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|B_g(v)\|_\infty < \infty \quad \text{für ein } \alpha > 0.$$

Damit bildet $v \to u$ $\mathcal{L}^2(\Omega)$ in eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ab, da nach Voraussetzung g gleichmäßig beschränkt ist. Da diese Abbildung zusätzlich stetig ist, hat sie nach dem Fixpunktsatz von Schauder einen Fixpunkt in $H_0^1(\Omega)$. Nach [13, Theorem 2.2] ist diese Lösung essentiell beschränkt. ■

Beweis von Lemma 2.6 : Es gilt

$$-\langle \Delta u, \phi(u) \rangle = \sum -\left\langle \partial_i^2 u, \phi(u) \right\rangle = \sum \langle \partial_i u, \phi'(u) \cdot \partial_i u \rangle = \sum \|\partial_i u \cdot \Theta'(u)\|_2^2 = \|\nabla \Theta(u)\|_2^2,$$

da $\Theta'(s)^2 = \phi'(s)$ nach Definition. Seien nun $\{u_n\}$ die Eigenfunktionen von $-\Delta$ mit Dirichlet-Randbedingung zu den Eigenwerten $\{\lambda_n\}$ (also $-\Delta u_n = \lambda_n u$). Die u_n können o.B.d.A. so gewählt werden, dass sie reel sind und eine Orthonormalbasis von $\mathcal{L}^2(\Omega)$ bilden. Weiterhin gilt

$$\lambda_n \|u_n\|_2^2 = \langle -\Delta u_n, u_n \rangle = \|\nabla u_n\|_2^2.$$

Sei nun $w \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Nach Definition von u_n gibt es α_n mit $w = \sum \alpha_n u_n$, damit

$$\|\nabla w\|_2^2 = \sum \|\alpha_n \nabla u_n\|_2^2 = \sum \lambda_n \|\alpha_n u_n\|_2^2 \geq \lambda_1 \|w\|_2^2$$

nach Wahl von λ_1. Mit $w = \Theta \circ v$ folgt die Behauptung. ■

2.3. Verallgemeinerung auf den inhomogenen Fall

Korollar 2.1

Seien Φ, ϕ, g wie in Satz 2.5 mit $w = 0$. Außerdem sei

$$s\phi''(s) \leq \text{const}\, \phi'(s) \quad \text{für } |s| \text{ genügend groß.} \tag{2.33}$$

Dann gibt es für alle $f \in \tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega)$ eine Lösung u von

$$-\Delta u + B_g(u) = f$$

mit den Eigenschaften aus Satz 2.5.

Beweis: Wir zeigen die Voraussetzungen an g von Satz 2.5 für $g(x,s) - f(x)$. (2.2) und $M_C \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ sind offensichtlich erfüllt, da $f \in \tilde{\mathcal{L}}_\Phi(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ (cf. Satz 2.3). Sei $w(x) := \Phi(kf(x))$, wobei $k > 1$ später gewählt wird. Da nach (2.25) $\Phi(ks)/\Phi(s)$ für $|s| \to \infty$ beschränkt ist, ist $w \in \mathcal{L}^1$. Nach Voraussetzung gilt außerdem $g(x,s)\phi(s) \geq 0$. Mit Young's Ungleichung folgt

$$|f(x)\phi(s)| \leq \Phi(kf(x)) + \Psi(k^{-1}\phi(s)).$$

Da Ψ konvex und $\Psi(0) = 0$ gilt

$$\Psi\left(k^{-1}\phi(s)\right) \leq k^{-1}\Psi\left(\phi(s)\right),$$

also für große $|s|$

$$\frac{(g(x,s) - f(x))\phi(s) + w(x)}{\Theta(s)^2} \geq -k^{-1}\frac{\Psi(\phi(s))}{\Theta(s)^2}.$$

Der letzte Quotient ist mit (2.26) beschränkt für $|s| \to \infty$, somit lässt sich k so groß wählen, dass (2.29) erfüllt ist. ■

3. Maßwertige rechte Seite

3.1. Gleichung ohne Störterm

Sei $f = \mu$ nun in $\mathcal{M}(\Omega)$. Zuerst betrachtet man die Laplace Gleichung mit $g \equiv 0$, also

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \mu \quad \text{in } \Omega \\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Dabei ist u eine schwache Lösung, falls

$$
\begin{gathered}
u \in H_0^1(\Omega), \\
-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \zeta \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \zeta \, \mathrm{d}\mu \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega).
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Wie erwartet existiert für alle Maße eine Lösung:

Satz 3.1

Sei $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{W}_0^{1,1}(\Omega)$, dass (3.2) löst und $u \in \mathcal{W}_0^{1,q}(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$.

3.1.1. Beweis von Satz 3.1

Der Beweis dieses Satzes erfordert eine Abschätzung der Sobolev-Norm von u, die später gezeigt wird:

Lemma 3.1

Für alle $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, $B > 0$ gibt es ein $C > 0$, das nur von q, Ω und B abhängt und: Falls f in $H^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{L}^1(\Omega)$ liegt und u (3.2) löst, dann $\|f\|_1 \leq B \Rightarrow \|u\|_{1,q} \leq C$.

Beweis: Sei $\{f_n\} \subset H^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{L}^1(\Omega)$ eine Folge die im Distributions-Sinn gegen μ konvergiert. Außerdem wird angenommen, dass $\|f_n\|_1 \leq B = \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$. Sei u_n die Lösung von (3.1) mit $\mu = f_n$, d.h. für alle n gilt:

$$
\begin{gathered}
\nabla u_n \in \mathcal{L}^1(\Omega) \text{ und} \\
-\Delta u_n = f_n \text{ im Distributions-Sinn.}
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Mithilfe von Lemma 3.1 folgt $\|u_n\|_{1,q} \leq C$, wobei C nur von q, B und Ω abhängt. Damit gibt es ein u in $\mathcal{W}_0^{1,q}(\Omega)$ und eine Teilfolge (wieder um nummeriert) so dass

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \mathcal{W}^{1,q}(\Omega) \text{ schwach} \\ u_n &\to u \quad \mathcal{L}^q(\Omega) \\ u_n &\to u \quad \text{f.ü. .} \end{aligned}$$

Also kann man in (3.3) zum Grenzwert übergehen und der Satz wurde gezeigt. ■

3.1.2. Beweis von Lemma 3.1

Beweis: Sei $f \in \mathcal{W}^{-1,p'}(\Omega) \cap \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $\|f\|_1 \leq B$ und u die zugehörige Lösung von (3.2). Im Folgenden bezeichnen alle $c_1, c_2, \ldots$ Konstanten, die nur von q, Ω, f und B abhängen.

Definiere nun ψ_n wie folgt:

$$\psi_n(s) := \begin{cases} n & \text{falls } s > n \\ -n & \text{falls } s < -n \\ s & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verwendet man nun $\psi_n(u)$ als Testfunktion in (3.2), gelangt man zu

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi_n'(u)(\nabla u)^2 \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega f\psi_n(u) \, \mathrm{d}x \\ \int_{D_n} |\nabla u|^2 &\leq \int_\Omega |nf| = n\|f\|_1 = nc_1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei

$$D_n := \{x \in \Omega : |u(x)| \leq n\}.$$

Nun definiert man ψ_n wie folgt um:

$$\psi_n(s) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } s > n+1 \\ s-n & \text{wenn } n \leq s \leq n+1 \\ 0 & \text{wenn } -n \leq s \leq n \\ s+n & \text{wenn } -n-1 \leq s \leq -n \\ -1 & \text{wenn } s < -n-1. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{B_n} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \leq c_1$$

mit

$$B_n := \{x \in \Omega : n \leq |u(x)| \leq n+1\}.$$

Für alle $q < 2$ folgt mit der Hölder Ungleichung

$$\int_{B_n} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_{B_n} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{q}{2}} |B_n|^{1-\frac{q}{2}}.$$

Mit $\frac{1}{q^*} := \frac{1}{q} - \frac{1}{N}$ gilt

$$|B_n| = \int_{B_n} \frac{1}{|u|^{q^*}} |u|^{q^*} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n^{q^*}} \int_{B_n} |u|^{q^*} \, \mathrm{d}x.$$

Sei nun $c_2 := c_1^{\frac{q}{2}}$, dann gilt

$$\int_{B_n} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \leq c_2 \left(\int_{B_n} |u|^{q^*} \, \mathrm{d}x \right)^{1-\frac{q}{2}} \frac{1}{n^{q^*(1-\frac{q}{2})}}.$$

Nochmaliges anwenden von Hölder mit den Exponenten $\frac{2}{2-q}$ und $\frac{2}{q}$ liefert für alle $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B_n} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \leq c_2 \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B_n} |u|^{q^*} \, \mathrm{d}x \right)^{1-\frac{q}{2}} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-q^*(2-q)/q} \right)^{\frac{q}{2}}.$$

Zusammen mit (3.4) und Hölder folgt also

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \leq c_3 n_0^{\frac{q}{2}} + c_2 \|u\|_{q^*}^{q^*(1-\frac{q}{2})} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-q^*(2-q)/q} \right)^{\frac{q}{2}}, \tag{3.5}$$

wobei $c_3 := c_1^{\frac{q}{2}} |\Omega|^{1-\frac{q}{2}}$. Die Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung zeigt, dass

$$\|u\|_{q^*}^q \leq c_4 \left(c_3 n_0^{\frac{q}{2}} + c_2 \|u\|_{q^*}^{q^*(1-\frac{q}{2})} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-q^*(2-q)/q} \right)^{\frac{q}{2}} \right). \tag{3.6}$$

Außerdem gilt

$$q^* \left(1 - \frac{q}{2} \right) = \frac{Nq}{N-q} \frac{2-q}{2} = q \frac{1-\frac{q}{2}}{1-\frac{q}{N}} \leq q$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \, q^* \left(\frac{2}{q} - 1 \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \, N \frac{2-q}{N-q} = \frac{2-N}{(N-q)^2} \leq 0,$$

also

$$q^* \left(\frac{2}{q} - 1 \right) > N \frac{2 - \frac{N}{N-1}}{N - \frac{N}{N-1}} = \frac{2(N-1)-N}{N-2} = 1.$$

Wählt man n_0 geeignet so liefern (3.5) und (3.6)

$$\|u\|_{q^*} \leq c_6,$$
$$\|\nabla u\|_q \leq c_7.$$

■

3.2. Gleichung mit Störterm

Nun betrachtet man (1.1) für g nicht null und $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Wie auch für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ müssen an g einige Voraussetzungen gestellt werden:

Satz 3.2

Sei g Funktion mit (2.2) (stetig bzw. messbar), sowie

(3.7) *Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt $g(x,s)s \geq 0$ f.ü. in Ω,*

(3.8) *Es gibt $b_1 \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $b_2 \in \mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$, $\delta < \frac{N}{N-2}$ mit $|g| \leq b_1 + |s|^\delta b_2$*

und $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dann existiert eine Lösung u von (1.1).

Anmerkung 3

Ist g zusätzlich monoton und hängt nur von u ab, so lässt sich auch Eindeutigkeit der Lösung aus Satz 3.2 zeigen (cf. [5, Corollary 4.B.1])

Anmerkung 4

Die Grenze $\delta < \frac{N}{N-2}$ ist scharf für $N \geq 3$: Sei $g(u) := |u|^{\delta-1}u$ und $\delta \geq \frac{N}{N-2}$, so gibt es $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ für die keine Lösung existiert (z.B. für das Dirac-Maß an einem beliebigen $y \in \Omega$, cf. [5, Theorem 4.B.6]). Für welche spezielle Kombinationen von g und f Lösungen existieren wird in Abschnitt 4 behandelt.

3.2.1. Beweis von Satz 3.2

Beweis: Zuerst wird g durch Cutoff-Funktionen g_n angenähert, die wie folgt definiert sind:

$$g_n(x,s) := \begin{cases} g(x,s) & \text{falls } |g(x,s)| \leq n \\ \operatorname{signum}(g(x,s))n & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei für g_n (2.2) und (3.7) erfüllt bleiben. Sei nun $f_n \in H^{-1}(\Omega)$. Es ist bekannt, dass $u_n \in H^1_0(\Omega)$ existiert, das (1.2) mit $f = f_n$ und $g = g_n$ erfüllt (cf. [12]).

Seien die f_n nun weiterhin so gewählt, dass $f_n \to f$ im Distributions-Sinn und $f_n \leq f_{n+1}$, also $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem bezeichne $\{\psi_i\}$ eine Folge von monoton wachsenden C^∞ Funktionen. Wählt man $\psi_i(u_n)$ als Testfunktion, so folgt

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \left(\psi_i(u_n)\right) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\nabla u_n\right)^2 \psi_i'(u_n) \,\mathrm{d}x \geq 0,$$

also mit (1.2)

$$\int_\Omega B_{g_n}(u_n)\psi_i(u_n) \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f_n \psi_i(u_n) \,\mathrm{d}x.$$

Weiterhin lässt sich ψ_i so wählen, dass $\psi_i \to \psi$ mit

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{für } s > t \\ -1 & \text{für } s < -t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Übergang zum Grenzwert liefert

$$\int_{\{|u_n|>t\}} |B_{g_n}(u_n)| \, \mathrm{d}x \le \int_{\{|u_n|>t\}} |f_n| \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+. \tag{3.9}$$

Mit $t = 0$ gelangt man zu

$$\|B_{g_n}(u_n)\|_1 \le \|f_n\|_1.$$

Da nach Voraussetzung die f_n in $\mathcal{L}^1(\Omega)$ beschränkt sind, folgt mit $h_n := f_n - B_{g_n}(u_n)$

$$\|h_n\|_1 \le 2\|\mu\|_{\mathcal{M}}, \quad h_n \in H^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{L}^1(\Omega). \tag{3.10}$$

Mit Lemma 3.1 und (3.10) folgt, dass $\{u_n\}$ in $\mathcal{W}_0^{1,q}(\Omega)$, $1 \le q < \frac{N}{N-1}$ beschränkt und damit auch relativ kompakt ist. Wählt man nun eine (um-nummerierte) Teilfolge, so folgt

$$\begin{aligned} u_n &\to u \quad \text{in } \mathcal{W}_0^{1,q},\ 1 \le q < \frac{N}{N-1} \\ u_n &\to u \quad \text{f.ü.} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Der Satz von Rellich-Kondrachov zeigt mit der stetigen Einbettung von $W_0^{1,q}(\Omega)$ in $\mathcal{L}^{q^*}(\Omega)$ für $1 \le q < \frac{N}{N-1}$, dass

$$u_n \to u \quad \text{in } \mathcal{L}^r(\Omega),\ 1 \le r < \frac{N}{N-2}.$$

Zusammen mit (3.8) liefert das

$$B_g(u_n) \to B_g(u) \quad \text{in } \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{3.12}$$

Verwendet man nun (3.11), (3.12) zusammen mit der Wahl von f_n, kann man in (1.2) mit $u = u_n$, $g = g_n$ und $f = f_n$ zum Grenzwert übergehen. Fatou's Lemma und (3.9) ($t = 0$) zeigen außerdem noch, dass $B_g(u) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ($\|B_g(u)\|_1 \le \|\mu\|_{\mathcal{M}}$). ■

4. „Gute“ Maße für einen monotonen Störterm

Dieser Abschnitt befasst sich mit (1.1) für den Fall, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur von u abhängt, also mit der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u + g(u) &= \mu \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

und deren Lösbarkeit in Abhängigkeit von μ. Weiterhin wird im Verlauf des gesamten Abschnitts g stetig, monoton und $g(t) = 0 \; \forall t \leq 0$ sowie $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ vorausgesetzt. Wie im zuvor bereits angedeutet gibt es auch solche g, für die gewisse $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ keine Lösung von (4.1) zulassen. Nun stellt sich natürlich die Frage, ob und wie man diese f in Abhängigkeit von g charakterisieren kann.
Basierend auf [5] werden einige grundlegende Antworten auf diese Frage dargestellt. Diese Thematik ist aber im Ganzen zu umfangreich für diese Arbeit, daher wird auf die meisten Beweise verzichtet, es bleibt dem Leser überlassen diese nachzuschlagen. Für weitere Ergebnisse wird auch auf [1, 9] verwiesen.

4.1. Grundbegriffe und erste Ergebnisse

Da die Existenz einer Lösung i.A. nicht garantiert werden kann, wird versucht, durch Näherungslösungen mehr über die Natur des Problems herauszufinden. Zunächst benötigt man aber einige Begriffe: μ wird *gutes Maß* (bzgl. g) genannt, falls (4.1) eine Lösung zulässt, $\mathcal{G}_g$ bezeichnet die Menge aller guten Maße (bzgl. g). Weiterhin wird u *Sub-Lösung* genannt falls

$$\begin{gathered} u \in W_0^{1,2}(\Omega),\ g(u) \in L^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \zeta \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \zeta \cdot g(u) \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \zeta \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega), \zeta \geq 0. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Nun betrachtet man eine Annäherung von g für ein fixiertes f: Seien $g_n \in C(\mathbb{R})$, monoton und

$$g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq g, \tag{4.3}$$

$$g_n \to g. \tag{4.4}$$

Nach dem Satz von Dini konvergiert $g_n \to g$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$. Außerdem wird angenommen, dass die g_n von subkritischem Wachstum sind, d.h.

es gibt $C > 0$ und $p_n < \frac{N}{N-2}$ mit

$$g_n(t) \leq C\Big(|t|^p + 1\Big), \tag{4.5}$$

als Beispiel dient $g_n(t) := \min\{g(t), n\}$.

Proposition 4.1

Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ und sei u_n die (eindeutige) Lösung von (4.1) (mit $g = g_n$). Dann $u_n \downarrow u^*$ in Ω, wobei u^* die größte Sub-Lösung von (4.1) ist. Außerdem gilt

$$\left|\int_\Omega u^* \cdot \Delta\zeta \,\mathrm{d}x\right| \leq 2\|\mu\|_{\mathcal{M}}\|\zeta\|_\infty \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega)$$

und

$$\int_\Omega g(u)^* \,\mathrm{d}x \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}}.$$

Anmerkung 5

Eine direkte Konsequenz aus Proposition 4.1 ist, dass u^* nicht von der Wahl von g_n abhängt, sondern direkt mit g und μ verknüpft ist. Ist $\mu \in \mathcal{G}_g$ so ist u^* auch die Lösung von (4.1) (cf. [5, Corollary 4.B.2]).

Zu dieser Sub-Lösung wird nun ein passendes *reduziertes Maß* μ^* wie folgt definiert: Sei $\mu^* \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit

$$-\int_\Omega u^* \cdot \Delta\zeta \,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(u) \cdot \zeta \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \zeta \,\mathrm{d}\mu^* \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

μ^* ist eindeutig und immer ein gutes Maß (natürlich abhängig von g), außerdem ist $\mu^* \leq \mu$.

Satz 4.1

Für alle $\nu \in \mathcal{G}_g$ gilt:

$$\nu \leq \mu \Rightarrow \nu \leq \mu^*.$$

μ^* ist also das größte gute Maß kleinergleich μ.

Korollar 4.1

Es gilt

$$0 \le \mu - \mu^* \le \mu^+ := \sup\{\mu, 0\},$$

also

$$|\mu^*| \le |\mu|$$

und

$$\mu \ge 0 \Rightarrow \mu^* \ge 0.$$

Beweis: Jedes Maß $\nu \le 0$ ist ein gutes Maß, da die Lösung w von

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \nu \quad \text{in } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

$w \le 0$ in Ω erfüllt. Mit den Eigenschaften von g gilt $g(w) = 0$, also

$$-\Delta w + g(w) = v.$$

Insbesondere ist damit $-\mu^- \le 0$ ein gutes Maß. Da außerdem $-\mu^- \le \mu$ folgt mit Satz 4.1 $-\mu^- \le \mu^*$, also auch

$$\mu - \mu^* \le \mu + \mu^- = \mu^+.$$

■

Satz 4.2

Für alle $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ existiert eine Borel-Menge $\Sigma \subset \Omega$ mit $\operatorname{cap}(\Sigma) = 0$ und

$$(\mu - \mu^*)(\Omega \setminus \Sigma) = 0.$$

Hierbei bezeichnet cap die harmonische Kapazität einer Menge bzgl. Ω.

Definition 4.1

Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ heißt diffus *wenn $|\mu|(\Sigma) = 0$ für alle Borel-Mengen $\Sigma \subset \Omega$ mit* $\operatorname{cap}(\Sigma) = 0$. *$\mu$ heißt* konzentriert, *falls eine Borel-Menge $\Sigma \subset \Omega$ existiert mit* $\operatorname{cap}(\Sigma) = 0$ *und $|\mu|(\Omega \setminus \Sigma) = 0$.*

Lemma 4.1

Für jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ existieren eindeutige $\mu_c, \mu_d \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $\mu = \mu_c + \mu_d$ mit μ_d diffus und μ_c konzentriert *(cf. [8, Lemma 2.1]).*

Anmerkung 6
Ein Maß μ ist also genau dann diffus wenn $\mu_c = 0$ bzw. $\mu = \mu_d$.

Korollar 4.2
Jedes diffuse Maß ist ein gutes Maß.

Beweis: Sei Σ wie in Satz 4.2 mit $\mathrm{cap}(\Sigma) = 0$ und

$$(\mu - \mu^*)(\Omega - \Sigma) = 0.$$

Mit Korollar 4.1 gilt aber auch

$$(\mu - \mu^*)(\Sigma) \leq \mu^+(\Sigma) = 0,$$

da μ nach Voraussetzung diffus ist. Zusammen also $(\mu - \mu^*)(\Omega) = 0$, bzw. $\mu = \mu^*$. ∎

Satz 4.3
Sei $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ ein diffuses Maß. Dann gibt es $h \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $v \in C_0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \zeta \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega h \cdot \zeta \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \zeta \quad \forall \zeta \in C_0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega).$$

Außerdem können - für $\delta > 0$ - h und v so gewählt werden, dass

$$\|h\|_1 \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}}, \quad \|v\|_\infty \leq \delta \|\mu\|_{\mathcal{M}} \quad \text{und } \|v\|_{2,1} \leq \sqrt{\delta}\|\mu\|_{\mathcal{M}}.$$

4.2. Eigenschaften guter Maße

Satz 4.4
Sei $\mu \in \mathcal{G}_g$. Dann gilt für jedes $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $\nu \leq \mu$, dass ν auch ein gutes Maß ist.

Korollar 4.3
Sei $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Ist μ^+ diffus, dann ist $\mu \in \mathcal{G}_g$.

Beweis: Mit Korollar 4.2 gilt, dass μ^+ ein gutes Maß ist. Zusammen mit Satz 4.4 und $\mu \leq \mu^+$ folgt die Behauptung. ∎

Korollar 4.4
Sei $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}_g$. Dann ist $\nu := \sup\{\mu_1, \mu_2\}$ ebenfalls ein gutes Maß.

Beweis: Satz 4.1 zeigt, dass $\mu_1 \leq \nu^*$ und $\mu_2 \leq \nu^*$, also $\nu \leq \nu^* \leq \nu$, somit $\nu = \nu^*$ und $\nu \in \mathcal{G}_g$. ■

Korollar 4.5

Die Menge $\mathcal{G}_g$ ist konvex.

Beweis: Sei $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}_g$ beliebig. Für alle $t \in [0,1]$ gilt

$$t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \leq \sup\{\mu_1, \mu_2\}.$$

Korollar 4.4 und Satz 4.4 liefern die Behauptung. ■

Korollar 4.6

Für jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ gilt

$$\|\mu - \mu^*\|_{\mathcal{M}} = \min_{\nu \in \mathcal{G}_g} \|\mu - \nu\|_{\mathcal{M}},$$

außerdem wird das Minimum nur durch μ^* erreicht.

Beweis: Sei $\nu \in \mathcal{G}_g$. Weiterhin gilt

$$|\mu - \nu| = \Big(\mu - \nu\Big)^+ + \Big(\mu - \nu\Big)^- \geq \Big(\mu - \nu\Big)^+ = \mu - \inf\{\mu, \nu\}.$$

$\kappa := \inf\{\mu, \nu\} \in \mathcal{G}_g$ nach Satz 4.4. Satz 4.1 zeigt $\kappa \leq \mu^*$. Damit

$$|\mu - \nu| \geq \mu - \kappa \geq \mu - \mu^* \geq 0,$$

womit

$$\|\mu - \nu\|_{\mathcal{M}} \geq \|\mu - \mu^*\|_{\mathcal{M}}$$

folgt, dies zeigt den ersten Teil des Korollars. Um die Eindeutigkeit zu zeigen sei $\nu \in \mathcal{G}_g$, so dass das Minimum angenommen wird. Man definiert wieder $\kappa := \inf\{\mu, \nu\}$ ($\kappa \in \mathcal{G}_g$, $\kappa \leq f$), es gilt

$$\|f - \kappa\|_{\mathcal{M}} \leq \|\mu - \nu\|_{\mathcal{M}}.$$

Damit gilt $\nu = \kappa \leq \mu$ und mit Satz 4.1 $\nu \leq \mu^* \leq \mu$. Nach Wahl von ν muss $\nu = \mu^*$ sein. ■

Proposition 4.2

$\mathcal{G}_g$ ist abgeschlossen bzgl. der starken Topologie in $\mathcal{M}(\Omega)$.

4.3. Zentrale Ergebnisse

Satz 4.5

Sei $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dann ist $\mu \in \mathcal{G}_g$ für alle g genau dann wenn μ^+ diffus ist.

Satz 4.6

Sei $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent

(a) *μ ist gutes Maß*

(b) *μ^+ ist ein gutes Maß*

(c) *μ_c ist ein gutes Maß*

(d) *Es gibt $h \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $g(v) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und*

$$\mu = h - \Delta v$$

im Distributions-Sinn.

Anmerkung 7

[1] liefert ein ähnliches Ergebnis.

Mit Satz 4.6 folgt direkt:

Korollar 4.7

Es gilt $\mathcal{G}_g + \mathcal{L}^1(\Omega) \subset \mathcal{G}_g$.

4.3.1. Beweis von Satz 4.6

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Da μ und 0 gute Maße sind folgt mit Korollar 4.4, dass $\mu^+ = \sup\{\mu, 0\}$ auch ein gutes Maß ist.

(b) $\Rightarrow$ (a): μ^+ ist nach Voraussetzung ein gutes Maß und $\mu \leq \mu^+$, mit Satz 4.4 folgt die Behauptung.

(b) $\Rightarrow$ (c): Es gilt

$$\mu_c \leq \mu^+, \tag{4.6}$$

also $\left(\mu^+ - \mu_c\right)_d = \left(\mu^+\right)_d \geq 0$ und $\left(\mu^+ - \mu_c\right)_c = \mu_c^+ - \mu_c \geq 0$. Außerdem ist μ^+ gutes Maß, mit (4.6) und Satz 4.4 folgt, dass μ_c auch gutes Maß ist.

(c) $\Rightarrow$ (b): Für jedes Maß ν gilt

$$\nu^+ = \sup\{\nu_d, \nu_c\}. \tag{4.7}$$

Sei μ_c also ein gutes Maß. μ_d ist diffus, also mit Korollar 4.2 auch gut. Korollar 4.4 und (4.7) zeigen dann, dass $\mu^+ = \sup\{\mu_d, \mu_c\}$ auch ein gutes Maß ist.

(d) $\Rightarrow$ (c): Zuerst nimmt man an, dass $\operatorname{supp} v$ kompakt ist. Damit gilt also

$$\mu = h - \Delta v$$

im „schwachen“ Sinn. $\mu - h + g(v)$ ist also ein gutes Maß, die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (c) liefert, dass $\mu_c = (\mu - h + g(h))_c$ gutes Maß ist.
Sei nun v wieder wie im Satz gewählt. Damit ist $\Delta v \in \mathcal{M}(\Omega)$, mit [5, Theorem 4.B.1] folgt $v \in \mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)\, \forall 1 \leq p < \frac{N}{N-1}$. Sei außerdem $\{\phi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \phi_n \leq 1$ in Ω und $\phi_n(x) = 1$ falls $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}$. Dann

$$\phi_n \mu = h_n - \Delta(\phi_n v) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega),$$

mit

$$h_n := \phi_n h + 2\nabla v \cdot \nabla \phi_n + v\Delta\phi_n \ \in \mathcal{L}^1(\Omega).$$

Da außerdem $0 \leq g\left(\phi_n v\right) \leq g(v)$ f.ü. , ist $g\left(\phi_n v\right) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Damit gilt wie zuvor gezeigt

$$\phi_n \mu_c = \left(\phi_n \mu\right)_c \in \mathcal{G}_g \quad \forall n \geq 1.$$

Weiterhin $\phi_n \mu_c \to \mu_c$ stark in $\mathcal{M}(\Omega)$, nach Proposition 4.2 ist $\mathcal{G}_g$ stark abgeschlossen in $\mathcal{M}(\Omega)$, damit also $\mu \in \mathcal{G}_g$.

(a) $\Rightarrow$ (d): Offensichtlich. ■

A. Eigenschaften von g_λ aus dem Beweis von Satz 2.1

Zur Erinnerung: g hat die folgenden Eigenschaften:

(A.1) Für fast alle $x \in \Omega$ ist $s \mapsto g(x,s)$ monoton steigend und $g(x,0) = 0$.

(A.2) $g(x,s)$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$ messbar in $x \in \Omega$ und für fast alle $x \in \Omega$ stetig in s.

g_λ ist für alle $\lambda > 0$ definiert als

$$g_\lambda(x,s) := \frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{id} - (\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}\right)(s).$$

Zu zeigen ist

(A.3) $g_\lambda(x,s) \xrightarrow{\lambda \to 0} g(x,s)$.

(A.4) g_λ ist Lipschitz-stetig in s mit $L = \frac{2}{\lambda}$.

(A.5) $g_\lambda(x,s) \leq g(x,s)$ für alle $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Beweis: Zuerst zur Lipschitz-Stetigkeit: Sei $x \in \Omega$ fest und $s, r \in \mathbb{R}$, o.B.d.A. $s \geq r$. Es gilt:

$$|(s + \lambda g(x,s)) - (r + \lambda g(x,r))| \overset{g \text{ mon.}}{=} s - r + \lambda(g(x,s) - g(x,r)) \geq |s - r|,$$

damit

$$|g_\lambda(x,s) - g_\lambda(x,r)| = \frac{1}{\lambda}\left|s - r - \left((\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(s) - (\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(r)\right)\right| \leq \frac{2}{\lambda}|s - r|.$$

Für Konvergenz betrachtet man $g(x,s) - g_\lambda(x,s)$:

$$g(x,s) - g_\lambda(x,s) = g(x,s) - \frac{1}{\lambda}\left(s - (\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(s)\right) =$$
$$\frac{1}{\lambda}\left((\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(s) - (\mathrm{id} - \lambda g_x)(s)\right) = g(x,s) - g\left(x, (\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(s)\right)$$

Da g stetig in s ist folgt die Konvergenz. Außerdem ist $(\mathrm{id} + \lambda g_x)^{-1}(s) \leq s$, mit der Monotonie von g in s ist auch $g_\lambda(x,s) \leq g(x,s)$ gezeigt. ■

Literatur

[1] Baras, Pierre ; Pierre, Michel: Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones. In: *Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire* 2 (1985), Nr. 3, 185–212. http://eudml.org/doc/78096

[2] Boccardo, Lucio ; Gallouët, Thierry: Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data. In: *Journal of Functional Analysis* 87 (1989), Nr. 1, S. 149–169. http://dx.doi.org/10.1016/0022-1236(89)90005-0. – DOI 10.1016/0022–1236(89)90005–0. – ISSN 0022–1236

[3] Brokate, Martin: *Nonlinear Problems (Partielle Differentialgleichungen 2).* 2012. – Vorlesungsskript SS 2012, Fakultät für Mathematik, TU München

[4] Brézis, Haïm: Propriétés Régularisantes de Certains Semi-Groupes Non Linéaires. In: *Israel Journal of Mathematics* 9 (1971), Nr. 4, S. 513–534. http://dx.doi.org/10.1007/BF02771467. – DOI 10.1007/BF02771467. – ISSN 0021–2172

[5] Brézis, Haïm ; Marcus, Moshe ; Ponce, Augusto C.: Nonlinear elliptic equations with measures revisited. In: *Mathematical Aspects of Nonlinear Dispersive Equations (J. Bourgain, C. Kenig, and S. Klainerman, eds.), Annals of Mathematics Studies* 163 (2007), S. 55–110

[6] Brézis, Haïm ; Strauss, Walter A.: Semi-linear second-order elliptic equations in L1. In: *Journal of the Mathematical Society of Japan* 25 (1973), Nr. 4, S. 565–590. – ISSN 0025–5645

[7] Crandall, Michael G. ; Pazy, Amnon: Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets. In: *Journal of Functional Analysis* 3 (1969), Nr. 3, S. 376–418. http://dx.doi.org/10.1016/0022-1236(69)90032-9. – DOI 10.1016/0022–1236(69)90032–9. – ISSN 0022–1236

[8] Fukushima, Masatoshi ; Sato, Ken-iti ; Taniguchi, Setsuo: On the closable parts of pre-Dirichlet forms and the fine supports of underlying measures. In: *Osaka Journal of Mathematics* 28 (1991), Nr. 3, 517–535. http://hdl.handle.net/11094/6785

[9] Gallouët, Thierry ; Morel, Jean-Michel: Resolution of a semilinear equation in L1. In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics* 96 (1984), 0, S. 275–288. http://dx.doi.org/10.1017/S0308210500025403. – DOI 10.1017/S0308210500025403. – ISSN 1473–7124

[10] Krasnosel'ski, Mark A. ; Rutitski, Yakov B.: *Convex Functions and Orlicz Spaces.* 1958

[11] Kufner, Alois ; John, Oldrich ; Fucik, Svatopluk: *Function spaces.* Bd. 3. Springer, 1977

[12] Leray, Jean ; Lions, Jacques-Louis: Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder. In: *Bull. Soc. Math. France* (1965), Nr. 93, S. 97–107

[13] Stampacchia, Guido: On some regular multiple integral problems in the calculus of variations. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 16 (1963), Nr. 4, S. 383–421. `http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160160403`. – DOI 10.1002/cpa.3160160403

[14] Strauss, Walter A.: On weak solutions of semi-linear hyperbolic equations. In: *Anais Acad. Brasil. Ciências* 42 (1970), S. 645–651